Πιθανότητες 20/10

Παράδειγμα

1) Ζάρι ρίχνεται 6 φορές.

α) $A = \left\{ \begin{array}{l} \text{Οι όψεις } 2,4,6 \text{ εμφανίζονται} \\ \text{από } 2 \text{ φορές η καθεμία} \end{array} \right\}$

β) $B = \left\{ \begin{array}{l} \text{Τα αποτελέσματα των} \\ \text{ρίψεων είναι διαφορετικά} \end{array} \right\}$

Λύση

α. $P(A) = \dfrac{\|A\|}{\|S\|}$

$S = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_6) \; x_i = 1, \ldots 6, \; i = 1, \ldots, 6 \right\} \Rightarrow \|S\| = 6^6$

$P(A) = \dfrac{\binom{6}{2\,2\,2}}{6^6}$

π.χ. $A \left\{ \begin{array}{l} 224466 \\ 246624 \\ 246246 \\ \vdots \end{array} \right.$

β. $P(B) = \dfrac{\|B\|}{\|S\|} = \dfrac{6!}{6^6}$

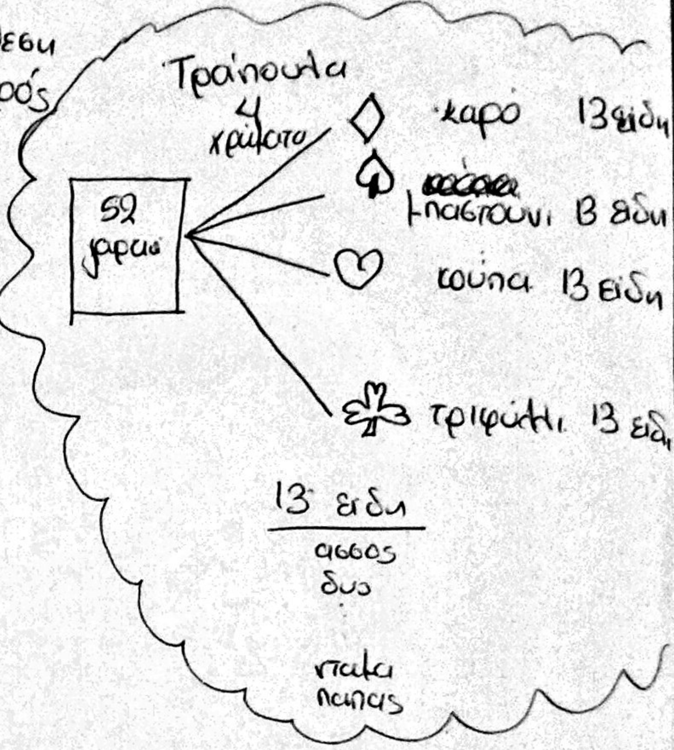
π.χ. $B \left\{ \begin{array}{l} 123456 \\ 654321 \\ 312465 \\ \vdots \end{array} \right.$

2) 52 κάρτες τράπουλας τοποθετούνται σε σειρά

P(η $36^{η}$ κάρτα να είναι άσσος) = ?

Λύση

$$P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{4 \times 51!}{52!}$$ ← 4 άσσοι, 51 θέσεις με μετάθεση αφού άσσος σταθερός



3) (Πρόβλημα γενεθλίων)

Αν υποθέσουμε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες όλες με την ίδια πιθανότητα να υπάρξει γέννηση.

P(κ άτομα (κ<365) διαφορετικά γενέθλια να έχουν) = ?

Λύση

$$\frac{1^{os}}{365} \quad \frac{2^{os}}{365} \quad \cdots \quad \frac{\kappa^{os}}{365} \qquad \|S\| = 365^{\kappa}$$

$$\frac{1^{os}}{365} \quad \frac{2^{os}}{364} \quad \cdots \quad \frac{\kappa^{os}}{365-\kappa+1} \qquad \|A\| = (365)_{\kappa}$$

Άρα $P(A) = \frac{\|A\|}{\|S\|} = \frac{(365)_{\kappa}}{365^{\kappa}}$

4) Μια κάλπη περιέχει n διακεκριμένες μαύρες σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το n και n διακεκριμένες άσπρες σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το n. k σφαίρες επιλέγονται από την κάλπη χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το δείγμα των k σφαιρών να περιέχει r μαύρες και k-r άσπρες

$(r \leq m \,,\ k-r \leq n)$ αν

α) Το δείγμα είναι μη διατεταγμένο (δεν ενδιαφέρει δηλαδή η σειρά επιλογής των σφαιρών.

β) Το δείγμα είναι διατεταγμένο.

Λύση

α. $$P(A) = \frac{\binom{m}{r} \times \binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}} = P_{M.\Delta}$$

β. $$P(A) = \frac{\binom{k}{r \,,\, k-r} \times (m)_r \times (n)_{k-r}}{(m+n)_k} = P_{\Delta}$$

$P_{M.\Delta} = P_{\Delta}$

5) (Πρόβλημα Chevalier de Mere στον Pascal)

Τι είναι συμφερότερο να στοιχηματίσει ένας παίκτης

A = {Ότι θα εμφανιστεί τουλάχιστον ένα 6 στη ρίψη ζαριού 4 φορές}

ή

B = {Ότι θα εμφανιστεί τουλάχιστον ένα διπλό έξι - εξάρες στη ρίψη 2 ζαριών 24 φορές?}

Λύση

Θα στοιχηματίσω στο A ή B που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα.
Αρκεί να βρω P(A), P(B)

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}518$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0{,}491$$

6) 5 κάρτες επιλέγονται από μια τράπουλα των 52 καρτών. Να υπολογιστεί η πιθανότητα.

α) Να είναι ίδιου χρώματος (π.χ σπαθιά, καρό κ.τ.λ)

β) Ενός ζεύγους (οι κάρτες είναι της μορφής α, α, β, γ, δ με α, β, γ, δ διαφορετικές να συμβολίζουν κάποιο είδος. π.χ άσσο, βαλέ κ.τ.λ)

γ) Δυο ζευγών (α, α, β, β, γ)

δ) Τρια ~~ε~~ίδιου είδους (α, α, α, β, γ)

ε) Τέσσερα του ίδιου ίδους (α, α, α, α, β)

Λύση

α $\dfrac{4 \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$ ή $\dfrac{\binom{4}{1} \times \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

Διαλέγω ένα χρώμα και Διαλέγω 5 απο το χρώμα που διαλεξα

β. $\dfrac{\binom{13}{4} \times \underset{\text{αα}}{\binom{4}{2}} \times \underset{\text{β}}{\binom{4}{1}} \times \underset{\text{γ}}{\binom{4}{1}} \times \underset{\text{δ}}{\binom{4}{1}}}{\binom{52}{5}} \times 4$

Ποιο απο τα 4 είδη θα παρω τα 2 χαρτια αα

γ $\dfrac{3 \times \binom{13}{4} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

δ. $\dfrac{3 \times \binom{13}{3} \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

ε. $\dfrac{2 \times \binom{13}{2} \times \underset{\text{αααα}}{\binom{4}{4}} \times \underset{\text{β}}{\binom{4}{1}}}{\binom{52}{}}$